УДК 514.8

***Валерій БОРИСЕНКО*, *Олексій АГАРКОВ*,**
Костянтин ПАЛЬКО, Максим ПАЛЬКО
м. Миколаїв
borisenko.valery@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ

У статті розглядається метод моделювання плоских кривих із застосуванням лінійних, квадратичних і кубічних залежностей розподілу кривини від довжини дуги. На підставі цих ділянок формуються складені криві із забезпеченням в точках стикування рівності перших і других похідних, кривини та похідної від кривини по довжині дуги.

Ключові слова: плоска крива, складена крива, моделювання, закон розподілу кривини лінійний, квадратичний, кубічний, довжина дуги.

У сучасній науковій літературі є достатньо публікацій, присвячених розробці нових чи удосконаленню існуючих методів моделювання кривих ліній. Незважаючи на те, що в прикладній геометрії існує велика кількість способів побудови плавних кривих, все ж таки зацікавленість цим питанням не знижується, що пояснюється широким застосуванням ліній в науці і техніці. Особливої важливості питання моделювання ліній набуває при проектуванні обводів таких складних технічних об'єктів як корпус судна, кузов автомобілю, крило літака, лопатки турбін і компресорів тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У практиці моделювання кривих ліній певного поширення набули такі методи, як Ерміта [5], Безьє [6], Бола [8], бета-сплайнів [3], кривих Catmull-Rom [9], *B*-сплайнів [5]. В комп'ютерній графіці застосовуються NURBS-криві, які є неоднорідними раціональними сплайнами Безьє і задаються координатами початкової і кінцевої точок та сукупністю проміжних точок [11].

Останнім часом при моделюванні кривих почали застосовуватися їх параметричні рівняння, в яких за параметр береться довжина дуги кривої. Це означає, що для таких кривих можуть бути знайдені їх рівняння в функції довжини дуги. Але подібних кривих обмаль і не всі вони можуть бути корисними в практичних застосуваннях.

Автори робіт [1, 2, 7] моделюють криві із застосуванням лінійних законів розподілу кривини. Різні закони розподілу кривини для плоских кривих і кривини та скруту для просторових кривих стосовно лопаток турбін і компресорів досліджені в роботі [4].

Постановка завдання. Метою статті є моделювання та дослідження плоских кривих ліній, кривина яких підпорядковується лінійній, квадратичній або кубічній залежності від довжини її дуги, формування на їх підставі складених кривих за умови забезпечення в точках стикування рівності перших і других похідних, кривини та похідної від кривини, визначеної по довжині дуги.

Виклад основного матеріалу. Відомо, що крива може бути визначена її натуральним рівнянням $k = k(s)$, де k – кривина кривої; s – довжина дуги.

Кривина кривої k визначається наступною залежністю:

$$k(s) = d\varphi/ds, \tag{1}$$

де φ – кут, утворений між віссю абсцис та дотичною до кривої лінії.

Вираз (1) дозволяє знайти диференціал кута $d\varphi$, проінтегрувавши який можна визначити кут нахилу дотичної до кривої в довільній її точці:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s)\,ds. \tag{2}$$

Рівняння кривої в натуральній параметризації мають вигляд:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos\varphi(s)\,ds;\;\; y(s) = y(0) + \int_0^s \sin\varphi(s)\,ds, \tag{3}$$

де $x(0),\ y(0)$ – сталі інтегрування, які відповідають початковій точці кривої.

У цій роботі при моделюванні кривих застосовуються лінійні (4), квадратичні (5) та кубічні (6) залежності кривини від довжини дуги:

$$k = as + b; \tag{4}$$

$$k = as^2 + bs + c; \tag{5}$$

$$k = as^3 + bs^2 + cs + d. \tag{6}$$

Невідомі коефіцієнти цих залежностей визначаються в процесі моделювання кривої, яка має проходити через певні точки та мати задані кути нахилу дотичних і навіть забезпечувати необхідні значення кривини тощо.

Застосувавши у рівнянні (2) вище записані залежності розподілу кривини, отримаємо вирази для розподілу кутів нахилу дотичних вздовж кривої:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + as^2/2 + bs; \tag{7}$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + as^3/3 + bs^2/2 + cs; \tag{8}$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + as^4/4 + bs^3/3 + cs^2/2 + d \cdot s. \tag{9}$$

Оскільки за умовами моделювання кривих передбачається, що кути нахилу дотичних в початковій φ_1 та кінцевій φ_2 точках відомі, це дозволяє підстановкою до виразів (7) – (9) записати наступні залежності:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + aS^2/2 + bS; \tag{10}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + aS^3/3 + bS^2/2 + cS; \tag{11}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + aS^4/4 + bS^3/3 + cS^2/2 + d \cdot S. \tag{12}$$

У виразах (10) – (12) під S розуміється довжина дуги кривої між початковою та кінцевою точками, яка на початку моделювання є також величиною невідомою і підлягає визначенню в процесі моделювання кривої для заданих умов її побудови.

На перший погляд з появою довжини дуги S кількість невідомих збільшується, але із виразів (10) – (12) можна знайти залежності для визначення одного із коефіцієнтів прийнятого закону розподілу кривини. При виконанні розрахунків, пов'язаних із моделюванням конкретних кривих, було визначено, що із виразів (10) – (12) доцільно визначати коефіцієнт a. Отже будемо мати:

$$a = \frac{2}{S}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{S} - b\right); \tag{13}$$

$$a = \frac{3}{S}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{S^2} - \frac{bS}{2} - c\right); \tag{14}$$

$$a = \frac{4}{S}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{S^3} - \frac{bS^2}{3} - \frac{cS}{2} - d\right). \tag{15}$$

1. *Моделювання кривих з лінійним законом розподілу кривини.* Задачу моделювання кривих з лінійним законом (4) розподілу кривини будемо розв'язувати за умови, що відомі координати початкової та кінцевої точок, а також кути нахилу в них дотичних. Необхідно визначити три невідомих величини: коефіцієнти a і b та довжину дуги S. Залежність (13) зменшує кількість невідомих до двох.

Знайти ці невідомі можна тільки числовим методом, зокрема методом мінімізації. За цільову функцію в цій задачі прийнято відхилення кінцевої точки кривої, що проміжно розраховується, від заданої точки:

$$\delta_i = \sqrt{\left(\overline{x} - x_{i+1}\right)^2 + \left(\overline{y} - y_{i+1}\right)^2}, \tag{16}$$

де $\overline{x}$, $\overline{y}$ – координати проміжної точки, визначеної з деякими значеннями невідомих параметрів.

Задавшись значеннями невідомих коефіцієнта b та довжини дуги ділянки S, можна за виразами (3) розрахувати значення координат деякої умовно кінцевої точки кривої, які, цілком зрозуміло, не будуть збігатися з вихідними значеннями координат кінцевої точки кривої, що моделюється.

Для мінімізації функціоналу (16) застосовано високоефективний алгоритм, запропонований Хуком-Дживсом [10], який розроблено для мінімізації функції багатьох змінних. Процес розрахунків закінчується, коли кінцева точка проміжної ділянки кривої наближається до заданої точки з наперед обумовленою точністю.

Отже, застосувавши алгоритм Хука-Дживса для кожної ділянки кривої, можна визначити з достатньою точністю коефіцієнт b і довжину дуги кривої S.

На рис. 1 – 4 наведені деякі результати моделювання кривих, що мають лінійний характер розподілу кривини від довжини дуги. Відрізки прямих на рисунках визначають кути нахилу дотичних в початковій і кінцевій точках. Світлі кола відповідають положенням початкової та кінцевих точок, маленькі кола на кривих лініях – проміжним точкам, отриманим у результаті моделювання кривих після остаточного визначення всіх невідомих величин.

Рис. 1 демонструє вплив ординати кінцевої точки на характер кривих за умови, що всі інші вихідні дані залишаються незмінними. Вплив абсциси кінцевої точки на змодельовані криві показано на рис. 2. Рис. 3 і 4 відображають вплив кутів нахилу дотичних до кривої, що моделюється, в початковій і кінцевій її точках. Кут φ_1 в початковій точці варіювався в межах від нуля до 50° з кроком 10°, а в кінцевій точці – від нуля до –50° з кроком –10°.

Оскільки параметри, що варіювалися, вибиралися довільно, то отримані наочні зображення підтверджують працездатність методу моделювання кривих із застосуванням лінійних залежностей від довжини дуги кривої.

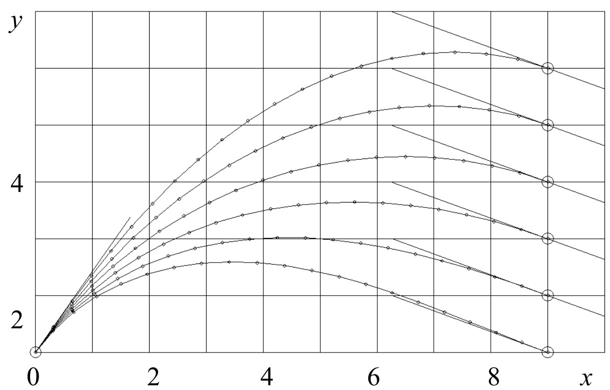

Рис. 1. Вплив ординати кінцевої точки на криві

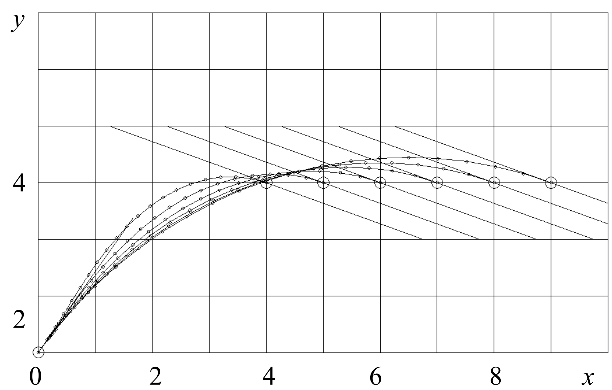

Рис. 2. Вплив абсциси кінцевої точки на криві

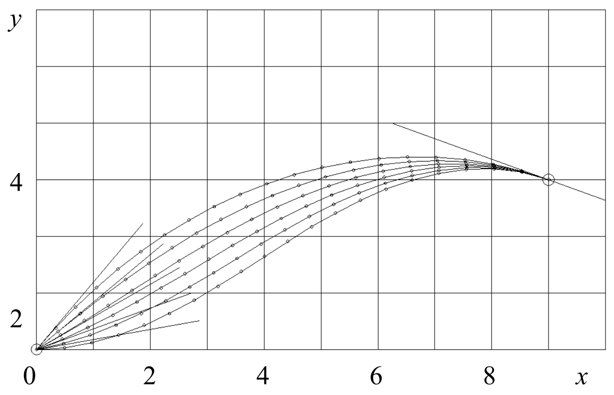

Рис. 3. Вплив кута нахилу дотичної в початковій точці на криві

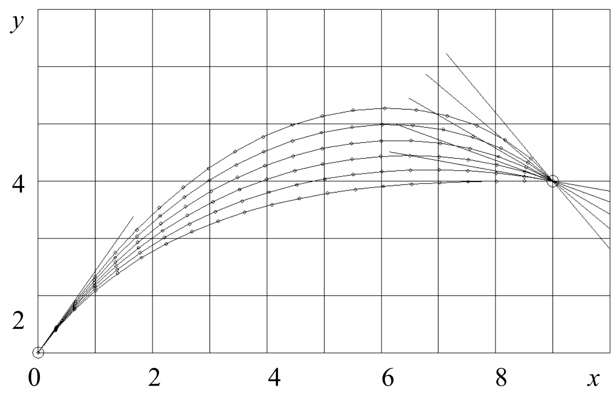

Рис. 4. Вплив кута нахилу дотичної в кінцевій точці на криві

2. *Моделювання складених кривих, ділянки яких будуються із застосуванням лінійних законів розподілу кривини.* Криві моделювалися за умови, що кривина кожної ділянки підпорядковувалася лінійній залежності від довжини дуги. Невідомі коефіцієнти a_i і b_i та довжина дуги S_i знаходилися числовим методом мінімізації функціоналу (16).

Результати моделювання складених кривих, кожна ділянка з яких підпорядковується лінійному закону розподілу кривини, наведені на рис. 5–8. Відрізки прямих, які зображені на рис. 5–7, відповідають дотичним, проведеним до кривої в точках спряження суміжних ділянок.

Окрім координат точок, що застосовуються при моделюванні кривої, мають бути задані похідні, які в геометричному сенсі відповідають кутам нахилу дотичних. Кути нахилу дотичних в першій і останній точках задавалися з вихідними даними. Кути нахилу дотичних у проміжних точках визначалися, подібно тому, як це зроблено в роботі [9]. У деякій i-й точці кут нахилу дотичної приймається рівним куту нахилу прямої, що з'єднує $(i - 1)$ та $(i + 1)$ точки. За цим принципом побудовані криві, показані на рис. 6–8.

На рис. 6 складена крива побудована за умови, що було змінено положення останньої точки та кута нахилу в ній дотичної. За цих обставин змінився кут нахилу дотичної в передостанній точці. Відповідно змінився характер проходження кривих другої та третьої ділянок.

Графічні результати, показані на рис. 7, отримані за умови, що змінено нумерацію другої і третьої точок. Зрозуміло, що результуюча складена крива суттєво змінила свою форму.

На рис. 8 показана цікава крива, яка отримана модифікованою програмою моделювання складеної кривої. В цій програмі величини кутів нахилу дотичних у всіх точках вводилися з вихідними даними, але складена крива все ж таки була побудована.

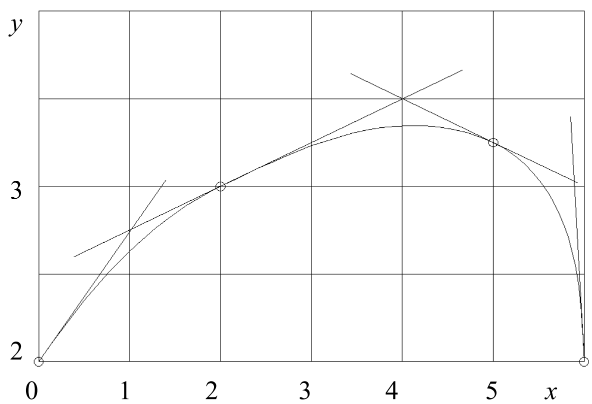

Рис. 5. Складена крива з лінійними законами розподілу кривини

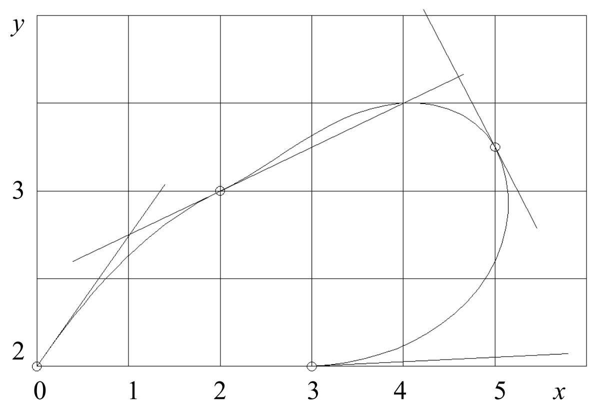

Рис. 6. Складена крива зі зміненою геометрією кінцевої точки

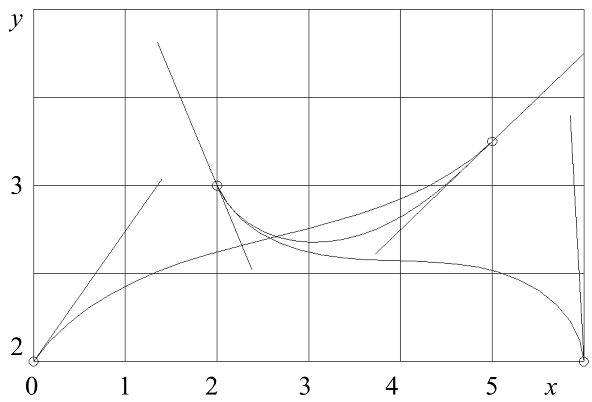

Рис. 7 Складена крива зі зміненими положеннями проміжних точок

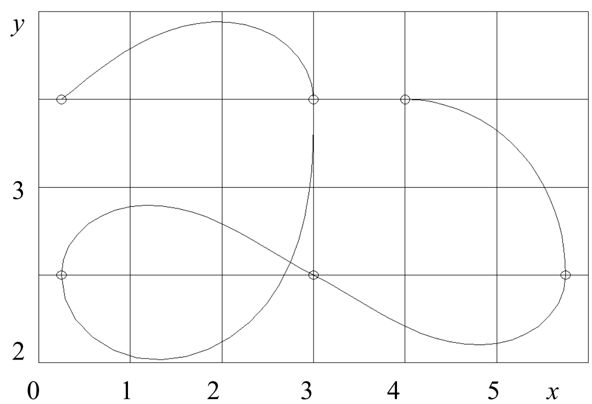

Рис. 8 Складена крива цікавої форми

3. *Моделювання складених кривих, ділянки яких будуються з лінійним і квадратичним законами розподілу кривини.* Розглянемо побудову кривої, яка складається з двох ділянок, за умови, що в точці стикування кривина ділянок буде однаковою. Подібне моделювання складеної кривої можна реалізувати, якщо будуть відомі координати початкової та кінцевої точок, а також деякої проміжної точки. Крім того, в усіх цих точках мають бути відомими кути нахилу дотичних. Тобто вихідні дані мають розташовуватися у площині так, як це показано на рис. 9.

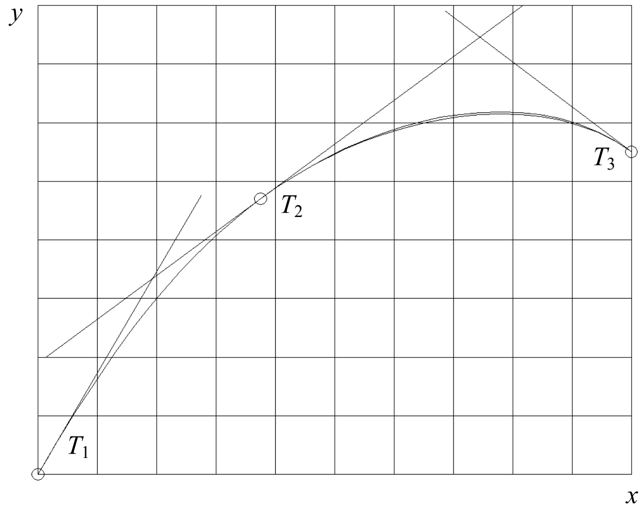

Рис. 9. Крива з лінійним і квадратичним розподілами кривини ділянок

Ділянку кривої T_1T_2 будемо моделювати з лінійним законом розподілу кривини вигляду (4). По завершенні моделювання цієї ділянки і визначенні невідомих величин можна знайти значення кривини в точці T_2:

$$k_{T_2} = a_1 S_1 + b_1.$$

У цьому виразі індекс *1* означає приналежність коефіцієнтів і довжини дуги до першої ділянки складеної кривої, що моделюється.

Ділянку T_2T_3 будемо моделювати за умови, що в початковій її точці, тобто в точці T_2, починається відлік довжини дуги, отже $s_2 = 0.$

Для забезпечення умови рівності кривини в точці стикування ділянок необхідно збільшити степінь закону розподілу кривини на другій ділянці складеної кривої, зокрема застосувати квадратичну залежність вигляду (5).

Необхідність підвищення степеня закону розподілу кривини обумовлюється тим, що лінійний закон не забезпечує достатньої гнучкості для того, щоб на ділянці T_2T_3 довести криву, що моделюється, до точки T_2 із заданим кутом нахилу дотичної. Дійсно, при $s_2 = 0$ коефіцієнт b_2 буде дорівнювати значенню кривини в точці T_2. Оскільки коефіцієнт a_2 визначається залежністю, подібній (13), то залишається тільки одна невідома величина, це довжина дуги S_2, яка, зрозуміло, не може забезпечити доведення другої ділянки кривої до точки T_2 із заданим кутом нахилу дотичної.

Другу ділянку складеної кривої між точками T_2 і T_3, будемо моделювати з використанням квадратичної залежності кривини від довжини дуги.

Порівнявши кривину в кінцевій точці першої ділянки з кривиною в початковій точці другої ділянки, де $s_2 = 0$, отримаємо, що $c_2 = k_{T_2}$.

Оскільки коефіцієнт a_2 визначається залежністю (14), то для моделювання другої ділянки складеної кривої необхідно числовим методом знайти коефіцієнт b_2 і довжину дуги S_2. За рівняння, які дозволять визначити вказані невідомі, застосовуються вирази (3) та відомі координати точки T_3.

Працездатність запропонованого метода моделювання двохланкової складеної кривої підтверджується отриманими результатами. На рис. 10 наведені конкретні результати моделювання складеної кривої.

На рис. 10 зображені графіки розподілу кута φ нахилу дотичної до обводу, кривини k і похідної k' від кривини по довжині дуги. Довжина дуги взята у відносному вигляді.

З цих даних видно, що крива розподілу кута нахилу дотичної (крива *1*) має задовільний характер, чого не можна сказати про дві інші криві. Крива *2* в точці стикування ділянок має злам, а крива *3* – терпить розрив.

Подібна ситуація є небажаною, необхідно розробити заходи по усуненню цього явища, що можливе тільки підвищенням степеня закону розподілу кривини.

4. *Моделювання складених кривих, ділянки яких будуються із застосуванням лінійного та кубічного законів розподілу кривини.* Моделювання ділянки T_2T_3 складеної кривої будемо виконувати

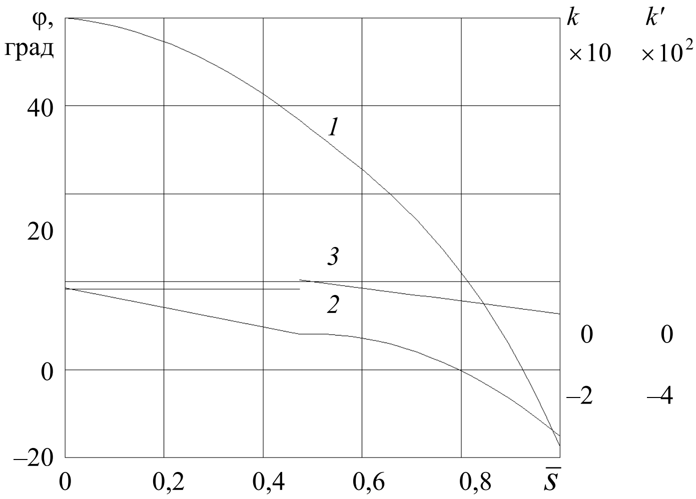

Рис. 10. Графіки диференціальних характеристик кривої з лінійним і квадратичним розподілами кривини ділянок: *1* – розподіли кута нахилу дотичної; *2* – кривини; *3* – похідної від кривини

із з застосуванням кубічного закону розподілу кривини вигляду (5). Це дозволить забезпечити в точці стикування рівність не тільки кривини, але й її похідної від довжини дуги.

Оскільки кривина ділянок складеної кривої в точці стикування має бути однаковою, то $d_2 = k_{T_2}$.

Величину коефіцієнта c_2 можна визначити за умови рівності похідної від кривини по довжині дуги в точці стикування.

Ця похідна в кінцевій точці першої ділянки буде дорівнювати величині коефіцієнта a_1, тобто $k'_{T_2} = a_1$.

Похідна від виразу (6) для другої ділянки складеної кривої має вигляд:

$$k' = 3a_2 s^2 + 2b_2 s + c_2.$$

Звідси випливає, що при $s = 0$, коефіцієнт c_2 буде дорівнювати a_1. Оскільки коефіцієнт a_2 визначається виразом (15), то для побудови кривої другої ділянки складеної кривої залишається визначити коефіцієнт b_2 і довжину дуги S_2, що можна зробити шляхом мінімізації відхилення кінцевої точки від заданої точки T_3. Тобто, задача розв'язується таким же самим чином, що й у вище розглянутих прикладах.

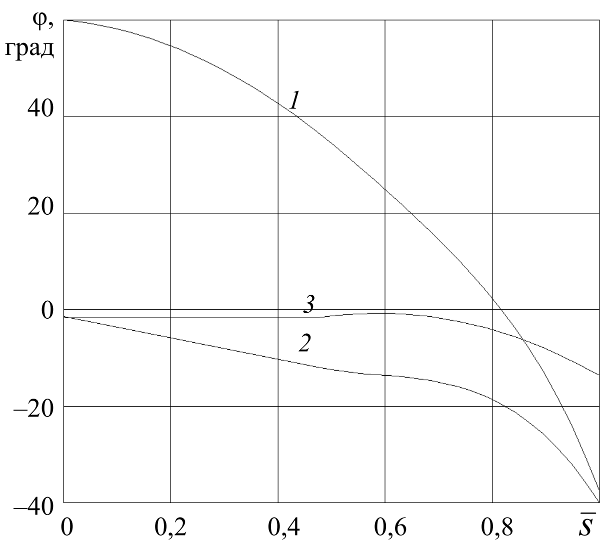

Рис. 11. Графіки диференціальних характеристик кривої з лінійним і кубічним розподілами кривини ділянок: *1* – розподіли кута нахилу дотичної; *2* – кривини; *3* – похідної від кривини

Уведення додаткової умови щодо рівності похідної кривини кривої від довжини дуги в точці стикування призвело до позитивного ефекту, який візуально можна побачити на рис. 11. На кривій залежності кривини від довжини дуги (крива *2*) злам відсутній. Позитивний ефект, пов'язаний із застосованими заходами, також можна побачити на кривій розподілу похідної від кривини (крива *3*), на якій усунена її неоднозначність у точці стиковки.

Таким чином, завдяки підвищенню степеня закону розподілу кривини можна поліпшити графіки розподілу кривини та її похідної від довжини дуги.

Висновки і перспективи досліджень. Практичною реалізацією в широкому діапазоні варіювання вихідних даних доведена можливість моделювання кривих ліній із застосуванням лінійних графіків розподілу кривини від довжини дуги та складених кривих з квадратичними і кубічними залежностями кривини. Подальші зусилля в справі моделювання кривих мають бути спрямовані на забезпечення застосуваннях законів розподілу кривини більш високих ступенів.

Список використаних джерел

1. Борисенко В. Д. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К. : КНУБА, 2006. — Вип. 76. — С. 43—49.

2. Борисенко В. Д. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривиною / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Геометричне та комп'ютерне моделювання. — Харків : ХДУХТ, 2004. — Вип. 5. — С. 30–34.
3. Поляков А. Ю. Методы и алгоритмы компьютерной графики в примерах на Visual C++ / А. Ю. Поляков, В. А. Брусенцев. — СПб. : БХВ-Петербург, 2003. — 560 с.
4. Устенко С. А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.01.01 Прикладна геометрія, інженерна графіка / Сергій Анатолійович Устенко. — К. : КНУБА, 2013. — 40 с.
5. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. — М. : Мир, 1982. — 304 с.
6. Шикин Е. В. Кривые на плоскости и в пространстве / Е. В. Шикин, М. М. Каменецкий. — М. : Фазис, 1997. — 325 с.
7. Adams J. A. The intrinsic method for curve definition / J. A. Adams // Computer Aided Design. — 1975. — Vol. 7, No 4. — P. 243—249.
8. Ball A. A.CONSURF, Part 2: Description of the algorithms / A. A. Ball // Computer Aided Design. — 1975. — № 7. — P. 237—242.
9. Catmull E.A class of local interpolating splines / E. Catmull, R. Rom // Computer Aided Geometric Design, R. E. Barnhill and R. F Reisenfeld, Eds. Academic Press. — New York, 1974. — P. 317—326.
10. Hooke R. Direct search solution of numerical and statistical problems / R. Hooke, T. A. Jeeves // Journal of the ACM. — 1961. — Vol. 8, No 2. — P. 212—229.
11. Rogers D. F. An introduction to NURBS: With historical perspective / D. F. Rogers. — Morgan Kaufmann Publishers, 2001. — 324 p.

Valeriy BORISENKO, Aleksey AGARKOV,
Constantin PALKO, Maxim PALKO
Mykolaiv

MODELING OF CURVES IN THE NATURAL PARAMETRIZATION

In the article the method of curves modelling using linear, quadratic and cubic curvature distribution dependence on the length of the arc is proposed. Based on these parts the composed curves are formed, provided that the curves in the docking points have equal first and second derivatives, the derivative of curvature and curvature to the arc length.

Key words: plane curve, composed curve, modelling, curvature of the linear, quadratic, cubic distribution, arc length.

Валерий БОРИСЕНКО, Алексей АГАРКОВ,
Константин ПАЛЬКО, Максим ПАЛЬКО
г. Николаев

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ В НАТУРАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В статье рассматривается метод моделирования участков кривых с применением линейных, квадратичных и кубических зависимостей распределения кривизны от длины дуги. На основании этих участков формируются составные кривые при условии обеспечения в точках стыковки равенства первых и вторых производных, кривизны и производной от кривизны по длине дуги.

Ключевые слова: плоская кривая, составленная кривая, моделирование, распределение кривизны линейное, квадратичное, кубическое, длина дуги.

Стаття надійшла до редколегії 19.02.2016