

УДК 514.18

Валерій БОРИСЕНКО

borisenko.valery@gmail.com

ORCID: 0000-0002-0857-0708

Андрій УСТЕНКО

austenko0@gmail.com

ORCID: 0000-0002-0546-7019

м. Миколаїв

АЛГОРИТМИ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ

Стаття присвячена аналітичному розгляду алгоритмів геометричного моделювання поверхонь у натуральній параметризації та застосуванням лінійних і нелінійних законів розподілу кривини вздовж головних напрямів модельованої поверхні.

Ключові слова: геометричне моделювання, поверхня, натуральна параметризація, розподіл кривини.

Постановка проблеми

Питання розробки нових методів геометричного моделювання поверхонь турбує фахівців різних галузей науки як в теоретичному, так і практичному плані. Відомим методам подання поверхонь (аналітичному, кінематичному, проєктивному, шляхом нелінійних перетворень простору) притаманні як певні переваги, так і недоліки.

Методи моделювання поверхонь мають відповідати певним вимогам, які впливають з практики їх застосування при описі обводів технологічно складних галузей промисловості, та вимог, обумовлених необхідністю забезпечення таких властивостей поверхонь як: неперервність, гладкість (неперервність часткових похідних або диференційованість), відсутність «вмятин» і «складок», необумовлених характером вихідної інформації.

Відносно недавно почали розвиватися методи подання поверхонь у натуральній їх параметризації та застосуванням певних законів розподілу кривини вздовж головних їх напрямів u і v . Варіюючи вихідними даними, коефіцієнтами законів розподілу кривини, можна впливати на форму модельованої поверхні.

На кафедрі комп'ютерної інженерії МНУ імені В.О. Сухомлинського протягом

останніх років проводяться наукові дослідження, пов'язані з розробкою методів геометричного моделювання поверхонь у натуральній параметризації та застосуванням законів розподілу кривини вздовж головних їх напрямів. Закони розподілу кривини приймаються залежно від наявної інформації щодо проєктованої поверхні. Невідомі коефіцієнти цих законів визначаються числовим методом.

Треба відзначити, що дуже важливим при моделюванні поверхні є питання забезпечення її проходження через задані точки простору та мати в них визначені кути нахилу дотичних.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Останніми роками посилюється інтерес до дослідження та моделювання поверхонь із застосуванням параметричної форми їх подання, в яких за параметр приймаються довжина криволінійних координат. Згідно з термінологією, прийнятою в диференціальній геометрії, подібні рівняння називаються натуральними рівняннями.

Фундаментальні дослідження з цього питання закладені та розвинуті в роботах таких фахівців з диференціальної геометрії, як Норден А.П. [6], Рашевський К.П. [10], Фініков С.П. [12] та інших. Але цих

фахівців здебільшого цікавлять теоретичні питання формоутворення поверхонь, доведення теорем тощо. У меншій мірі вони торкаються практичних питань.

Певні кроки щодо моделювання поверхонь із застосуванням лінійних графіків розподілу кривини були зроблені в роботі [11]. Зокрема, в цій роботі показано, що варіюючи коефіцієнтами законів розподілу кривини, можна змінювати форму ділянки поверхні.

Треба відзначити, що лівова кількість робіт [3-5, 7-9], де розглядаються питання моделювання поверхонь, орієнтовані саме на побудову гілок поверхонь, а не на отримання їх ділянок, які проходять через певні точки простору, у тому числі із забезпеченням кутів нахилу дотичних в початковій та кінцевих точках.

Постановка завдання

Метою цієї роботи є послідовний розгляд методів геометричного моделювання поверхонь у натуральній параметризації та використанням лінійних і нелінійних законів розподілу кривини відносно головних напрямів моделюваної поверхні. Вибір закону розподілу кривини обумовлюється наявною геометричною інформацією, що застосовується при моделюванні поверхні.

Виклад основного матеріалу

Моделювання поверхонь у натуральній параметризації базується на фундаментальних положеннях диференціальної геометрії. Розглянемо фрагмент деякої поверхні, показаної на рис. 1, на якому під du і dv розуміються диференціали криволінійних координат поверхні, що відповідають нескінченно малому переміщенню по поверхні; кути $\varphi(u, v)$, $\theta(u, v)$ є кутами нахилу дотичних до головних напрямів поверхні в точці, яку назвемо початковою; u і v – криволінійні координати головних напрямів поверхні.

Ортогональні координати x , y і z довільної точки поверхні функціонально залежать від криволінійних координат u і v , тобто:

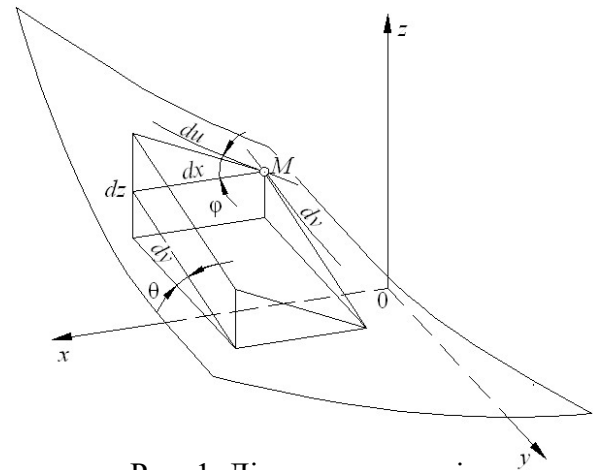


Рис. 1. Ділянка поверхні

$$\begin{cases} x = x(u, v); \\ y = y(u, v); \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Відомо [6, 10, 12], що кривина поверхні дорівнює швидкості зміни кутів нахилу дотичних φ та θ до головних її напрямів, тобто:

$$\frac{d\varphi}{du} = k_1(u, v); \quad \frac{d\theta}{dv} = k_2(u, v).$$

Інтегруючи ці вирази, визначають залежності для розрахунку кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні u і v в довільній її точці:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + \int_0^u k_1(u, v) du; \quad (1)$$

$$\theta(u, v) = \theta_0 + \int_0^v k_2(u, v) dv, \quad (2)$$

де φ_0 і θ_0 – кути нахилу дотичних до головних напрямів поверхні в початковій її точці, тобто при нульових значеннях криволінійних координат u і v .

Параметричне подання поверхні матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0 + \int_0^u \cos \varphi(u, v) du; \\ y(u, v) &= y_0 + \int_0^v \cos \theta(u, v) dv; \\ z(u, v) &= z_0 + \int_0^u \sin \varphi(u, v) du + \int_0^v \sin \theta(u, v) dv. \end{aligned} \quad (3)$$

Розглянемо геометричне моделювання ділянки поверхні за вихідними даними, наведеними на рис. 2.

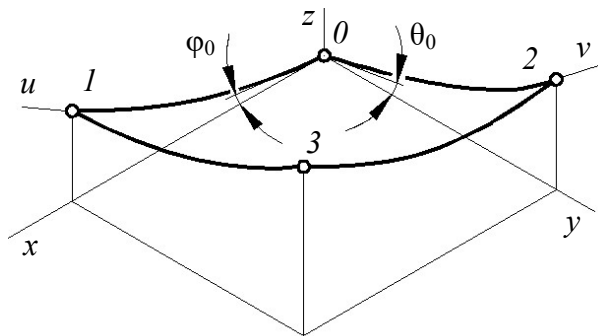


Рис. 2. Опорні точки ділянки поверхні

За цими вихідними даними, тобто відомими координатами трьох точок (нульова точка збігається з початком координат) та кутами нахилу дотичних φ_0 і θ_0 , можна прийняти, що кривина поверхні вздовж криволінійних координат u і v буде змінюватися за лінійними законами [1]:

$$k_1(u, v) = a_1 u + b_1 v + c_1; \quad (4)$$

$$k_2(u, v) = a_2 u + b_2 v + c_2, \quad (5)$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – коефіцієнти розподілів кривини вздовж головних напрямів поверхні, які підлягають визначенню при її геометричному моделюванні.

Для лінійних законів розподілу кривини (4) і (5) формули (1) і (2) для знаходження кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні матимуть вигляд:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + u \left(\frac{a_1 u}{2} + b_1 v + c_1 \right); \quad (6)$$

$$\theta(u, v) = \theta_0 + v \left(a_2 u + \frac{b_2 v}{2} + c_2 \right). \quad (7)$$

Задачу моделювання поверхні з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних напрямів можна розв'язати за наступним алгоритмом.

Крок 1. Забезпечення проходження крайки $\theta-1$ ділянки поверхні через точку 1 . Оскільки координата v дорівнює нулю, то змінюватися будуть координати x і z . Для побудови цієї крайки поверхні необхідно знайти значення коефіцієнтів a_1, c_1 та криволінійну координату u_1 . Визначення цих

невідомих виконується шляхом мінімізації відхилення деякої проміжної точки, розрахованої при значеннях параметрів a_1, c_1, u_1 , що оптимізуються, з метою досягнення збігу точки з оптимальними параметрами із заданою точкою 1 . На цьому кроці моделювання поверхні застосовано вискоєфективний алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований Хуком–Дживсом [13].

Крок 2. Забезпечення проходження крайки $\theta-2$ ділянки поверхні через точку 2 . У даному випадку криволінійна координата u дорівнює нулю, а будуть варіюватися координати y і z поверхні. Для побудови цієї крайки поверхні необхідно визначити коефіцієнти b_2, c_2 і криволінійну координату v_2 . Пошук цих параметрів здійснюється шляхом мінімізації відхилення проміжно отриманої точки від заданої точки 2 .

Крок 3. Знаходження значення коефіцієнта a_2 , який має забезпечити проходження проекції крайки $2-3$ поверхні через горизонтальну проекцію точки 3 . На цьому кроці мінімізується функція з однією змінною.

Крок 4. Знаходження значення коефіцієнта b_1 , який має забезпечити проходження проекції крайки $1-3$ поверхні через горизонтальну проекцію точки 3 .

У результаті числової реалізації наведених чотирьох кроків алгоритму геометричного моделювання ділянки поверхні з лінійними законами розподілу кривини у вигляді (4) і (5) вздовж головних її напрямів становляться відомими всі коефіцієнти, які необхідні для побудови ділянки поверхні.

На підставі запропонованого алгоритму геометричного моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних її напрямів розроблено відповідний програмний код у середовищі Фортран PowerStation. Основними програмними одиницями в цьому коді є підпрограми числового визначення інтегралів у виразах (3) та мінімізації відхилення відстаней проміжно отриманих точок від базових точок $1-3$. Ще одним завданням розробле-

ного коду є формування масивів вихідних даних, які в подальшому застосовуються в програмному продукті Wolfram Mathematica для візуалізації змодельованих поверхонь у більш реалістичному вигляді.

Приклад поверхонь з додатними значеннями кутів φ_0 і θ_0 нахилу дотичних до головних їх напрямів в нульовій точці та поступовому збільшенні значення координати z точок 1 і 2 показано на рис. 3. Кути в нульовій точці φ_0 і θ_0 збільшувалися від 30° до 90° з кроком, який дорівнював 30° .

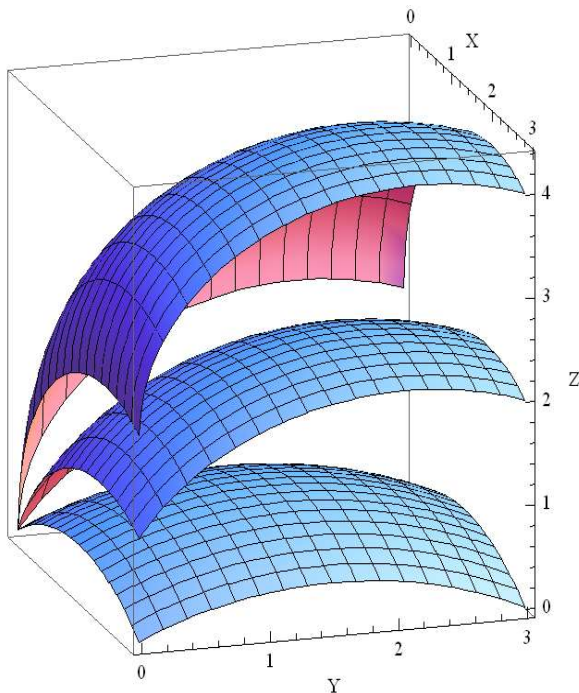


Рис. 3. Ділянки поверхонь, побудовані в Wolfram Mathematica

Треба відзначити, що лінійні закони розподілу кривини не дозволяють забезпечити проходження ділянки поверхні через точку 3. Пояснення цьому факту є наступним. Якщо задані три точки поверхні 1, 2 і 3, то відомі дев'ять координат, по три x , y і z . У той же час при реалізації описаних вище чотирьох кроків моделювання ділянки поверхні задіяні вісім невідомих: це шість коефіцієнтів $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ законів розподілу кривини та дві криволінійні координати u_1 і v_2 . Тобто у поставленій задачі є надлишкова інформація. Отже, за прийнятих законах розподілу кривини ді-

лянка поверхні може пройти через дві довільні точки, для третьої точки забезпечується збіг її горизонтальної проекції з горизонтальною проекцією вихідної точки 3.

У багатьох практичних застосуваннях у зв'язку із складністю геометричної форми модельованого об'єкта не вдається його представити однією ділянкою поверхні незалежно від способу її математичного опису. Одним із шляхів розв'язання подібної задачі є подання складної поверхні об'єкта ділянками поверхонь, які мають стикуватися між собою з найбільшим ступенем гладкості.

Застосовуючи лінійні закони розподілу кривини, можна побудувати складену поверхню, приклад якої наведено на рис. 4. Поверхня сформована з шести ділянок: трьох ділянок, розміщених вздовж осі x , і двох ділянок – вздовж осі y . Таким чином, ця складена поверхня формується з шести ділянок, з'єднаних в єдине ціле. Максимальна похибка стикування ділянок не перевищувала $8,56 \times 10^{-5}$ мм, розбіжність ділянок відносно кута φ дещо зросла, але вона не перевищувала $1,27 \times 10^{-2}$ градусів, а кута θ – $1,23 \times 10^{-2}$ градусів.

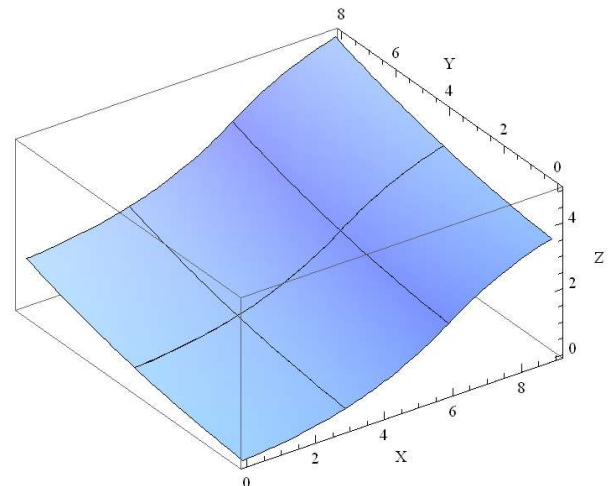


Рис. 4. Складена поверхня

Зазначимо, що кожна наступна ділянка поверхні моделювалася із застосуванням вихідних даних, отриманих після моделювання попередньої ділянки складеної поверхні.

Розглянемо задачу моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу їх кривини та заданими кутами нахилу дотичних в θ , I і 2 точках. В точці θ відомі кути φ_0 і θ_0 , в точці I відомий кут φ_1 , а в точці 2 – θ_2 (рис. 5).

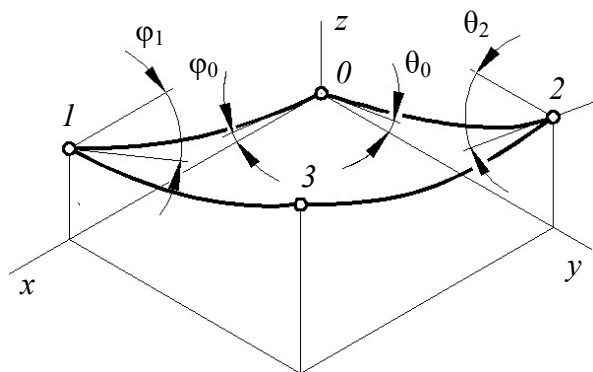


Рис. 5. Опорні точки ділянки поверхні та кути нахилу дотичних в точках, розташованих на осьових лініях

Задачу моделювання поверхні з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних напрямів і відомими кутами в точках I і 2 будемо розв'язувати за наступним алгоритмом.

Крок 1. Проведення крайки θ – I ділянки поверхні через точку I , для якої криволінійна координата v дорівнює нулю. З виразу (6) випливає, що

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^2}{2} + c_1 u_1, \quad (8)$$

де u_1 – криволінійна координата, яка відповідає точці I .

Зв'язок кутів φ_0 і φ_1 згідно з (8) визначає невідомий коефіцієнт a_1 :

$$a_1 = \frac{2}{u_1^2} (\varphi_1 - \varphi_0 - c_1 u_1).$$

По відношенню до вище розглянутого алгоритму моделювання поверхні з лінійними законами розподілу кривини кількість невідомих, які підлягають визначенню, завдяки наявності кута φ_1 , зменшилась до двох. Це коефіцієнт c_1 закону розподілу кривини та криволінійна координата u_1 . Їх визначення також відбувається шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від точки I .

Крок 2. Проведення крайки θ – 2 ділянки поверхні через точку 2 , для якої криво-

лінійна координата u дорівнює нулю. З виразу (7) випливає, що

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{b_2 v_2^2}{2} + c_2 v_2, \quad (9)$$

де v_2 – криволінійна координата, яка відповідає точці 2 .

Зв'язок кутів θ_0 і θ_2 згідно з (9) визначає невідомий коефіцієнт b_2 :

$$b_2 = \frac{2}{v_2^2} (\theta_2 - \theta_0 - c_2 v_2).$$

Для побудови крайки θ – 2 необхідно визначити коефіцієнт c_2 і криволінійну координату v_2 , які також знаходяться мінімізацією відстані між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в результаті роботи алгоритму мінімізації функції багатьох змінних.

Крок 3. Визначення коефіцієнта a_2 за умови забезпечення проходження проекції крайки 2 – 3 поверхні через горизонтальну проекцію точки 3 . На цьому кроці розглядається функція однієї змінної та мінімізується відхилення проекції на горизонтальну площину проекцій проміжної точки від проекції на цю ж площину точки 3 .

Крок 4. Визначення коефіцієнта b_1 , який має забезпечити проходження проекції крайки 1 – 3 поверхні через горизонтальну проекцію точки 3 . На цьому кроці також мінімізується функція однієї змінної. Цільовою функцією виступає та ж сама функція, що й на попередньому кроці моделювання ділянки поверхні.

На рис. 6 показані ділянки двох поверхонь, отриманих із застосуванням кутів φ_1 і θ_0 та без них. При цьому було підбрано такий ракурс, щоб можна було бачити різницю в геометрії крайки θ – I . Саме вздовж координатної осі x відмічається різниця в кутах φ_1 в точці I . Крайка θ – I поверхні, змодельованої з урахуванням кутів нахилу дотичних в точках I і 2 , більш вигнута, тому ця ділянка поверхні, якщо можна так висловитися, знаходиться нижче ділянки поверхні, побудованої без застосування означених кутів. Відхилення ділянок поверхонь вздовж крайки θ – 2 менше, оскільки і різниця кутів θ_2 незначна.

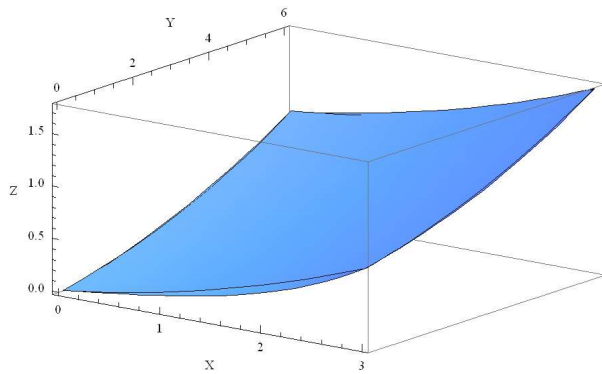


Рис. 6. Зіставлення поверхонь

Уведення до розгляду кутів φ і θ в кінцевих точках дозволяє впливати на геометрію модельованої поверхні. Вони є додатковими чинниками впливу, що дозволяє формувати поверхні, які відповідають наперед заданим, умовам.

Для забезпечення проходження ділянки модельованої поверхні через чотири точки простору необхідно до одного із законів розподілу кривини додати компоненту у вигляді добутку криволінійних координат.

Візьмемо закони розподілу кривини вздовж координат u і v у наступному вигляді:

$$k_1(u, v) = a_1u + b_1v + c_1uv + d_1; \quad (10)$$

$$k_2(u, v) = a_2u + b_2v + c_2, \quad (11)$$

де $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$ – коефіцієнти нелінійного розподілу кривини вздовж криволінійної координати u і лінійного розподілу кривини вздовж криволінійної координати v , які визначаються в процесі моделювання ділянки поверхні.

У залежностях (10) і (11) для визначення кривини задіяні сім невідомих коефіцієнтів. До них додаються також невідомі значення криволінійних координат u і v . Таким чином, у випадку, що розглядається існує дев'ять невідомих величин, які можна визначити за умови, що задані дев'ять ортогональних координат x, y і z точок 1, 2 і 3, уведених до розгляду вище.

Для законів розподілу кривини (10) і (11) формули (1) і (2) для обчислення кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні матимуть наступний вигляд:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + u \left(\frac{a_1u}{2} + b_1v + \frac{c_1}{2}uv + d_1 \right); \quad (12)$$

$$\theta(u, v) = \theta_0 + v \left(a_2u + \frac{b_2v}{2} + c_2 \right). \quad (13)$$

Задачу моделювання поверхні з нелінійним і лінійним законами розподілу кривини вздовж головних її напрямів розв'язують за наступним алгоритмом.

Крок 1. Забезпечення проходження крайки 0–2 ділянки поверхні через точки 0 і 2, для якої криволінійна координата u дорівнює нулю. У цьому випадку для побудови крайки поверхні 0–2 необхідно визначити коефіцієнти b_2, c_2 , а також криволінійну координату v_2 . Розв'язавши задачу мінімізації функції трьох змінних з цільовою функцією у вигляді відстані між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в процесі роботи алгоритму мінімізації, визначають коефіцієнти b_2 і c_2 та величину криволінійної координати v_2 .

Крок 2. Забезпечення проходження крайки 0–1 ділянки поверхні через точку 1, для якої криволінійна координата v дорівнює нулю і варіюватимуться координати x і z . Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти a_1, d_1 та криволінійну координату u_1 . Коефіцієнти a_1 і d_1 та криволінійна координата u_1 визначаються шляхом розв'язування задачі мінімізації функції трьох змінних за методом, описаним вище. У результаті реалізації першого і другого кроків запропонованого алгоритму визначаються шість невідомих величин.

Крок 3. Забезпечення проходження поверхні через точку 3. Для цього необхідно визначити решту невідомих коефіцієнтів, тобто b_1, c_1 і a_2 . Задача мінімізації розв'язується із застосуванням визначених вище значень криволінійних координат u_1 і v_2 .

На рис. 7 показані ділянки трьох поверхонь, змодельованих із застосуванням лінійного та нелінійного законів розподілу кривини та поступовим зростанням координати z точки 3. Збільшення кількості невідомих призвело в цій задачі до збігу з кількістю вихідних даних. Це надало можливість провести ділянки поверхонь через чотири задані точки простору.

Подібно розглянутій вище задачі моделювання поверхні з лінійними законами

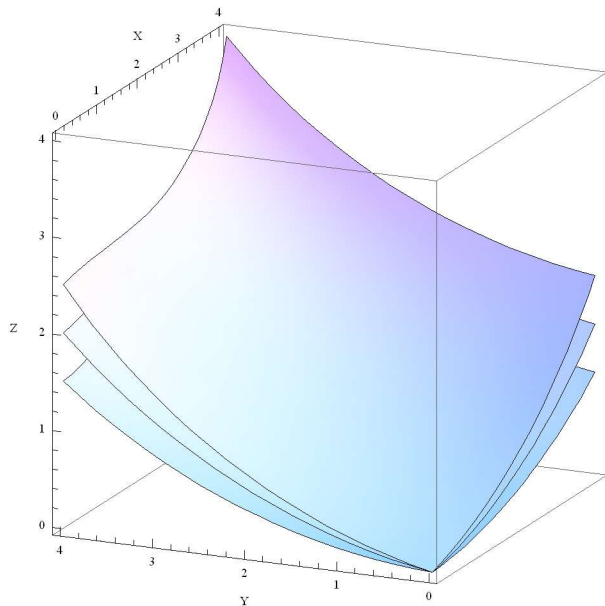


Рис. 7. Ділянки поверхонь, побудованих із застосуванням законів розподілу кривини (12)-(13)

розподілу кривини та заданими кутами нахилу дотичних в кінцевих точках координатних ліній (див. рис. 5) можна побудувати ділянки поверхонь з нелінійним і лінійним законами розподілу кривини у наступній послідовності.

Крок 1. Проведення крайки 0–2 ділянки поверхні через точку 2, для якої криволінійна координата u дорівнює нулю. З виразу (13) випливає, що

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{b_2 v_2^2}{2} + c_2 v_2, \quad (14)$$

де v_2 – криволінійна координата, яка відповідає точці 2.

Зв'язок кутів θ_0 і θ_2 згідно з (14) визначає невідомий коефіцієнт b_2 :

$$b_2 = \frac{2}{v_2^2} (\theta_2 - \theta_0 - c_2 v_2).$$

Для побудови крайки 0–2 необхідно визначити коефіцієнт c_2 закону розподілу кривини та криволінійну координату v_2 . Ці невідомі знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від точки 2.

Крок 2. Забезпечення проходження крайки 0–1 ділянки поверхні через точку 1, для якої криволінійна координата v дорівнює нулю і варіюватимуться координати x

і z . Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти a_1 , d_1 та криволінійну координату u_1 .

З виразу (12) випливає, що

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^2}{2} + d_1, \quad (15)$$

де u_1 – криволінійна координата, яка відповідає точці 1.

Зв'язок кутів φ_0 і φ_1 згідно з (15) дозволяє визначити коефіцієнт a_1 :

$$a_1 = \frac{2}{u_1^2} (\varphi_1 - \varphi_0 - d_1 u_1).$$

Коефіцієнт d_1 та криволінійна координата u_1 знаходяться шляхом розв'язування задачі мінімізації функції двох змінних.

Крок 3. Забезпечення проходження ділянки поверхні через точку 3. Для цього необхідно знайти три коефіцієнти b_1 , c_1 і a_2 шляхом розв'язання задачі мінімізації за визначених вище значеннях криволінійних координат u_1 і v_2 .

Три ділянки поверхонь, які мають опукло-увігнутий характер, показані на рис. 8. При побудові цих ділянок поверхонь змінювалися аплікати базових точок (вони рівномірно збільшувалися), зростав кут φ_0 від 10° до 20° з кроком 5° , кут φ_1 зменшувався від мінус 10° до мінус 30° з кроком мінус 10° , кут θ_0 зростав від 5° до 15° з кроком 5° , і, нарешті, кут θ_2 зростав від 25° до 55° з кроком 15° .

Найбільш складним є випадок моделювання ділянки поверхні, коли, окрім координат чотирьох точок, задані також і кути нахилу в них дотичних, причому в обох напрямках криволінійних координат. Схема розташування вихідних даних для цього варіанту моделювання ділянки поверхні показана на рис. 9.

Підвищення вимог до модельованої поверхні, пов'язане з введенням додатково до розгляду чотирьох кутів φ_2 , φ_3 , θ_1 і θ_3 , потребувало збільшення коефіцієнтів рівнянь, якими мають описуватися залежності кривини від криволінійних координат u і v . Ці залежності були прийняті у наступному вигляді:

$$k_1 = a_1 u^2 + b_1 v^2 + c_1 u + d_1 v + e_1 uv + f_1;$$

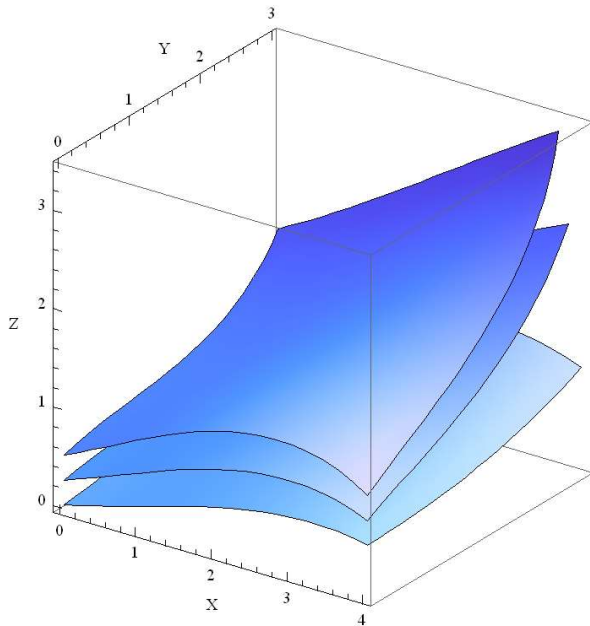


Рис. 8. Опукло-увігнуті поверхні

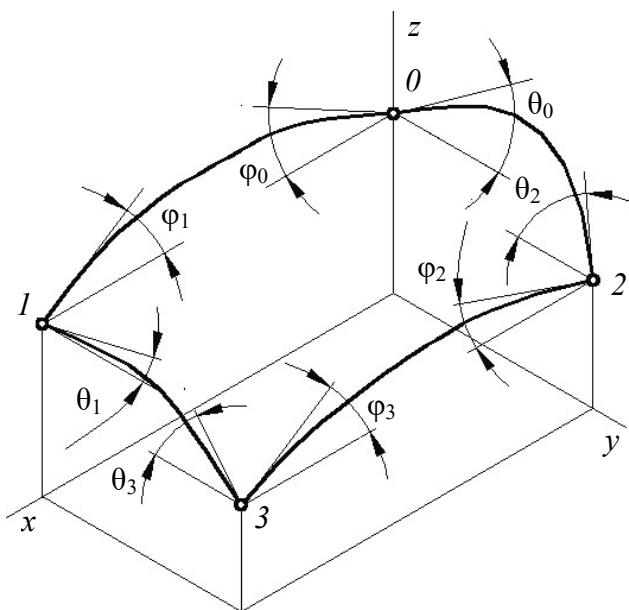


Рис. 9. Вихідні дані до моделювання поверхні

$$k_2 = a_2u^2 + b_2v^2 + c_2u + d_2v + e_2.$$

Інтегруванням цих залежностей отримаємо вирази, за якими будуть розподілятися кути φ і θ вздовж відповідних криволінійних координат:

$$\varphi = \varphi_{02} + \frac{a_1u^3}{3} + b_1uv^2 + \frac{c_1u^2}{2} + d_1uv + \frac{e_1u^2v}{2} + f_1u;$$

$$\theta = \theta_{01} + a_2u^2v + \frac{b_2v^3}{3} + c_2uv + \frac{d_2v^2}{2} + e_2v,$$

де φ_{02} і θ_{01} – кути в початку координат, яке переміщується по відповідній криволінійній координатній лінії та нульовому значенні другої криволінійної координати. Індксація 02 і 01 при кутах φ і θ відповідає крайкам модельованої ділянки поверхні.

Користування записаними вище виразами при розрахунках призводить до суттєвих похибок, бо вони не враховують змінність кута φ при переміщенні вздовж криволінійної координати v , коли координата u дорівнює нулю. А саме при цьому переміщенні кут φ_{02} змінюється від φ_0 до φ_2 . Оскільки характер цієї залежності невідомий, то для забезпечення можливості проведення розрахунків приймемо, що цей кут лінійно залежить від координати v у вказаних межах.

Таким чином, будемо мати

$$\varphi_{02} = \varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v,$$

де φ_{02} – початкове значення кута φ при $u = 0$ і варіюванні координати v від нуля до v_2 ; φ_0 і φ_2 – задані значення кутів в точках 0 і 2.

Подібні міркування можна зробити відносно кута θ_{01} , який при нульовому значенні координати v і варіюванні координати u в межах від нуля до u_1 змінюється від θ_0 до θ_1 . Отже, можна записати

$$\theta_{01} = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u.$$

Задача побудови ділянки поверхні зводиться до знаходження 11 коефіцієнтів у виразах, які визначають розподіли кривини вздовж криволінійних координат u і v та їх довжин u_1 і v_2 . Як і у вище розглянутому прикладі моделювання поверхні, вона розв'язується за три кроки.

Крок 1. Забезпечення проходження крайки 0–1 ділянки поверхні через точку 1, для якої криволінійна координата v дорівнює нулю і задіяними будуть координати x і z . Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти a_1 , c_1 , e_1 та криволінійну коор-

динату u_1 . Решта коефіцієнтів у побудові крайки $\theta-1$ не задіяна, оскільки криволінійна координата v має нульове значення.

Базуючись на залежностях розподілу кутів, можна знайти вираз для коефіцієнта a_1 :

$$a_1 = \frac{3}{u_1^3} \left(\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{c_1 u_1^2}{2} - f_1 u_1 \right).$$

Коефіцієнти c_1, f_1 і координата u_1 знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжно отриманої точки від заданої точки 1 .

Крок 2. Проведення крайки $\theta-2$ ділянки поверхні через точку 2 , для якої криволінійна координата u дорівнює нулю. Маючи вирази розподілу кутів θ , знаходимо вираз для коефіцієнта b_2 :

$$b_2 = \frac{3}{v_2^3} \left(\theta_2 - \theta_0 - \frac{d_2 v_2^2}{2} - e_2 v_2 \right).$$

Для побудови крайки $\theta-2$ необхідно визначити коефіцієнти d_2, e_2 закону розподілу кривини та криволінійну координату v_2 . Ці невідомі знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від заданої точки 2 . Для крайки $\theta-2$ будуть задіяні координати u і z .

Розв'язавши задачу мінімізації функції трьох змінних з цільовою функцією у вигляді відстані між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в процесі роботи алгоритму мінімізації, визначають коефіцієнт d_2, e_2 та величину криволінійної координати v_2 .

Крок 3. Забезпечення проходження ділянки поверхні через точку 3 . Перш за все знаходять вирази для обчислення коефіцієнтів b_1 і a_2 . Скориставшись залежностями кутів φ і θ для точки 3 , матимемо:

$$b_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_0}{u_1 v_2^2} - \frac{c_1 u_1}{2 v_2} - \frac{d_1}{u_1},$$
$$a_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1 - \theta_2 + \theta_0}{u_1^2 v_2} - \frac{c_2}{u_2}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Борисенко, В.Д. Алгоритм побудови поверхонь із заданими законами розподілу кривини [Текст] / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, О.Ю. Агарков // Збірник праць XII Міжнародної науково-практичної конференції «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем». ТААПСД'2015. – Київ, 2015. – С. 8-15.
2. Борисенко, В.Д. Складені поверхні з лінійними законами розподілу кривини [Текст] / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, О.Ю. Агарков // Збірник праць XIII Міжнародної науково-

Таким чином, для проведення крайок поверхні через точку 3 залишилося знайти два коефіцієнти d_1 і c_2 описаним вище способом. Задача мінімізації розв'язується за визначених вище значеннях криволінійних координат u_1 і v_2 .

Приклад змодельованої поверхні за

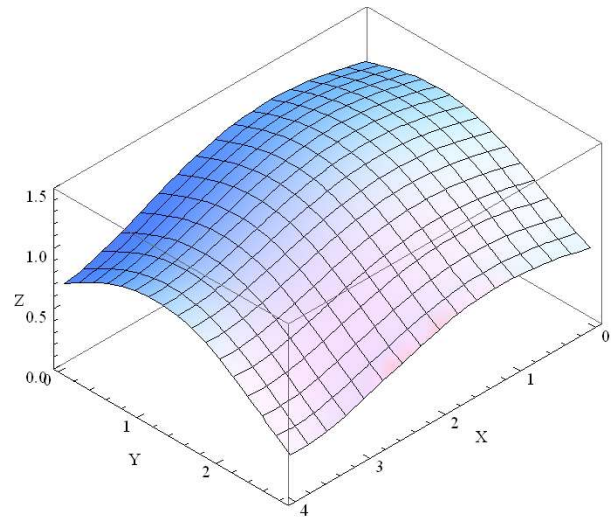


Рис. 10. Аксонометрична проекція ділянки поверхні в середовищі Wolfram Mathematica

означених вище умов наведено на рис. 10.

Висновки і перспективи досліджень

Розглянуті та запропоновані алгоритми моделювання поверхонь із застосуванням натуральної параметризації та лінійних і нелінійних законів розподілу кривини вздовж головних напрямів модельованих поверхонь. Подальші дослідження з геометричного моделювання поверхонь з заданими законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів мають бути спрямовані на розв'язання практичних питань, пов'язаних з описом складних поверхонь технічних виробів.

- практичної конференції «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем». ТАAPSD'2016. – Київ, 2016. – С. 30-34.
3. Токарева, Я.А. Аналітичне та комп'ютерне визначення поверхонь, одержаних переміщенням в просторі кривої змінної форми [Текст] / Я.А. Токарева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. – Том 57. – С. 68-75.
 4. Коровіна, І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інцидентії: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» [Текст] / Ірина Олександрівна Коровіна; КНУБА. – К., 2012. – 160 с.
 5. Несвідомін, В.М. Конструювання гвинтових поверхонь сталої середньої кривини [Текст] / В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака, О.А. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 216-223.
 6. Норден, А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] / А.П. Норден. – М.: ГИФМЛ, 1955. – 244 с.
 7. Пилипака, С.Ф. Конструювання лінійчатих поверхонь за допомогою тригранника Френе плоскої напрямної кривої [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2007. – № 17. – С. 91-96.
 8. Пилипака, С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» [Текст] / Сергій Федорович Пилипака; КНУБА. – К., 2000. – 35 с.
 9. Пилипака, С.Ф. Конструювання поверхонь у функції натурального параметра на поверхнях обертання [Текст] / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2012. Вип. 4. – Том 55. – С. 176-184.
 10. Рашевский, П.К. Курс дифференциальной геометрии [Текст] / П.К. Рашевский. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.
 11. Устенко, С.А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» [Текст] / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40 с.
 12. Фиников, С.П. Дифференциальная геометрия [Текст] / С.П. Фиников. – М.: Издательство МГУ, 1961. – 159 с.
 13. Hooke, R. Direct search solution of numerical and statistical problems [Text] / R. Hooke, T.A. Jeeves // Journal of the ACM. – 1961. – Vol. 8, No 2. – P. 212 – 229.

Valerii BORISENKO, Andrii USTENKO
Mykolayiv

SURFACE MODELING ALGORITHMS IN NATURAL PARAMETRIZATION

The article is devoted to the analytical consideration of algorithms for geometric modelling of surfaces in natural parameterization and the application of linear and nonlinear laws of curvature distribution along the principal directions of the simulated surface.

Keywords: *geometric modelling, surface, natural parameterization, curvature distribution.*

Валерій БОРИСЕНКО, Андрій УСТЕНКО
Николаев

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НАТУРАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Статья посвящена аналитическому рассмотрению алгоритмов геометрического моделирования поверхностей в натуральной параметризации и применением линейных и нелинейных законов распределения кривизны вдоль главных направлений моделируемой поверхности.

Ключевые слова: *геометрическое моделирование, поверхность, натуральная параметризация, распределение кривизны.*

Стаття надійшла до редколегії 31.03.2018