ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

УДК 532.5+519.63

Олег БУЛАНЧУК
obulan65@gmail.com
Галина БУЛАНЧУК
ggbulan7@gmail.com
Іван ЄВАРЛАК
evarlakivan@gmail.com
м. Маріуполь

ВИКОРИСТАННЯ ГІБРИДНИХ СХЕМ ПРИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

При чисельному розв'язку рівнянь математичної фізики часто використовуються гібридні схеми. Такі схеми доцільні при моделюванні процесів, що описуються функціями, які мають особливості розривного характеру (або великі градієнти). Метою статті є дослідження гібридних схем Федоренко при розв'язку рівняння переносу. Були розглянуті різні граничні та початкові умови. Показано, що стійкість розв'язків залежить від параметрів чисельної схеми. У тих областях, де функція розривна, краще використовувати схеми першого порядку апроксимації.

Ключові слова*: гібридні схеми, рівняння переносу, явний метод, розрахунок гібридного перенесення.*

Постановка проблеми

На сьогодні використовується багато різних наближених методів розв'язку рівнянь математичної фізики, якщо точні аналітичні розв'язки отримати неможливо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одними із методів є використання гібридних схем [1] при чисельному розв'язку рівняння. Такі схеми використовуються при моделюванні процесів, що описуються функціями, які мають особливості розривного характеру (або великі градієнти). Тоді у межах областей із великими градієнтами шуканого розв'язку використовується схема першого порядку апроксимації. У «гладких» областях розрахунок ведеться за немонотонною схемою другого порядку апроксимації. Під час аналізу гібридного перенесення виникають багато питань, пов'язаних із стійкістю методу та коректністю проведених розрахунків.

Постановка завдання

Метою статті є дослідження гібридних схем при розв'язку рівняння переносу, побудова чисельного алгоритму для розв'язку такого рівняння із заданими граничними та початковими умовами.

Виклад основного матеріалу

Математична постановка задачі

Одновимірне рівняння переносу є найбільш простим із рівнянь в частинних похідних, на прикладі якого можна пояснити всі основні ідеї і властивості чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь в частинних похідних. Найпростіше рівняння переносу має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t) \qquad (1)$$

З початковими умовами при $t=0$

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (2)$$

Рівняння (1) із умовою (2) є задачею Коші для функції $u(x,t)$. Точний розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$U(x,t)=\varphi(x-at)+\int_0^t f(x-at+at',t')dt' \qquad (3)$$

В даній роботі розв'язувалось рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

із граничними та початковими умовами двох типів:

$$u(0,t)=1,\ u(x,0)=\begin{cases}1,\ x<1,\\ 0,\ x>1;\end{cases}$$

та «прямокутний імпульс»

$$u(0,t)=0,\ u(x,0)=\begin{cases}1,\ x\in[0,\ 2],\\ 0,\ x\notin[0,\ 2].\end{cases}$$

Задача розв'язувалась в області $0<x<10$, $0<t<5$.

Чисельний метод

В даній роботі використовувалась гібридна схема (схема Р.П.Федоренко [1]) (рис. 1).

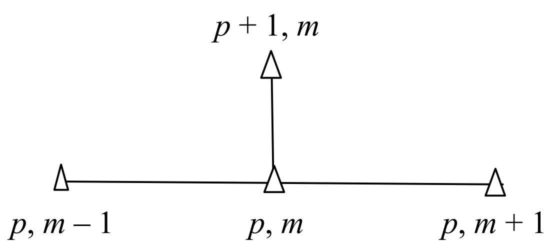

Рис. 1. Гібридна схема
(схема Р.П.Федоренко)

Для розв'язку рівняння використовувалась різницева схема:

$$\frac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}+a\frac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}+$$
$$+a\gamma\left(\frac{\tau}{h}-a\frac{\tau^2}{h^2}\right)\frac{u_{m-1}^p-2u_m^p+u_{m+1}^p}{2\tau}=f_m^p,$$
$$p=0,\ 1,\ \ldots,\ P-1;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ M-1;$$
$$u_m^0=\varphi_m,\qquad m=0,\ 1,\ \ldots,\ M;$$
$$u_m^p=\psi^p,\qquad p=1,\ 2,\ \ldots,\ P.$$

Тут $\left|u_{m-1}^p-2u_m^p+u_{m+1}^p\right|\le\lambda\left|u_m^p-u_{m-1}^p\right|$ при $\gamma=1$. В іншому випадку параметр гібридної схеми γ, що згладжує розривні функції, підбирається чисельно. При такій схемі значення сіткової функції на верхньому часовому шарі $p+1$ розраховується за її значенням на нижньому шарі p:

$$u_m^{p+1}=u_m^p-a\frac{\tau}{h}\left(u_m^p-u_{m-1}^p\right)-$$
$$-a\gamma\left(\frac{\tau}{h}-a\frac{\tau^2}{h^2}\right)\frac{u_{m-1}^p-2u_m^p+u_{m+1}^p}{2}+\tau f_m^p.$$

Введемо розрахункову сітку для просторової і тимчасової змінної x, t:

$$x_k=k\cdot h,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;$$
$$t_n=n\cdot\tau,\ n=0,1,2,\ldots,N,$$

де h – крок по просторовій координаті, τ – крок за часом.

Замість $U(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ розглядатимемо сіткові функції U_k^n, f_k^n, φ_k^n (які є проекціями функцій на сіткову область і для скорочення позначаються U_τ, f_τ. Замінимо рівняння (1) та неперервні похідні їх різницевими аналогами.

Результати чисельного розв'язку

На рис. 2-4 зображено розв'язки рівняння, отримані методом гібридного перенесення при початкових та граничних умовах першого типу. Суцільною лінією зображено аналітичний розв'язок, крапочками – чисельний, з використанням гібридних схем. Параметр λ регулює область, яку охоплює розв'язок. Чим більше λ, тим помітніші стають пульсації чисельного розв'язку.

На рис. 5-6 зображені розв'язки при початкових та граничних умовах другого типу. Тут теж спостерігається збільшення пульсацій при збільшенні λ.

Висновки і перспективи досліджень

Можна бачити, що схема гібридного перенесення є стійкою в тих випадках, коли початкові умови розривні. Тому в таких випадках доцільно використовувати явні схеми першого порядку апроксимації при малих значеннях параметра λ.

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

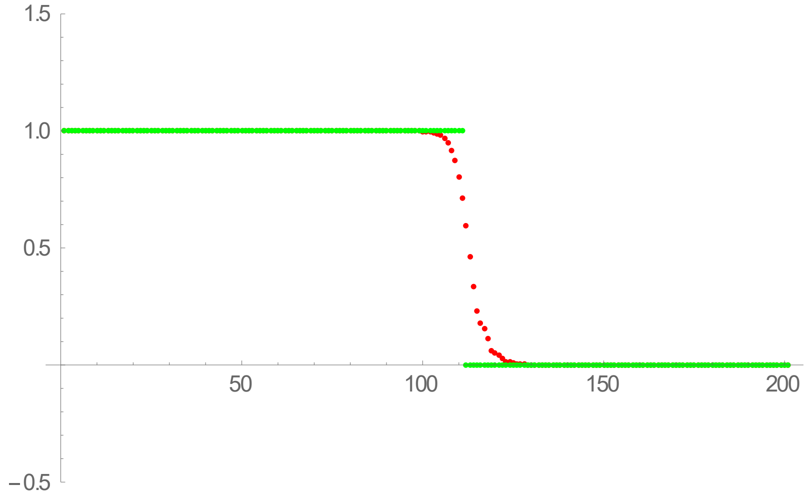

Рис. 2. Розв'язок рівняння переносу в момент часу t = 1,75 при λ = 1
(початкові умови типу «сходинка»)

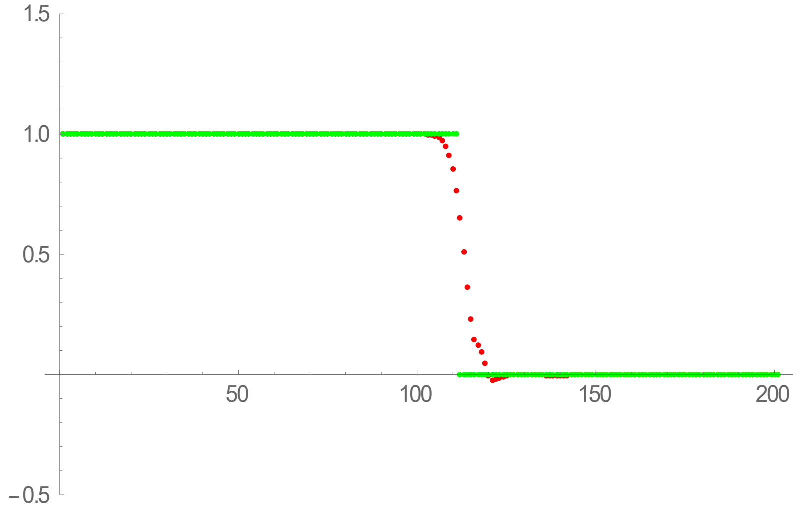

Рис. 3. Розв'язок рівняння переносу в момент часу t = 1,75 при λ = 2
(початкові умови типу «сходинка»)

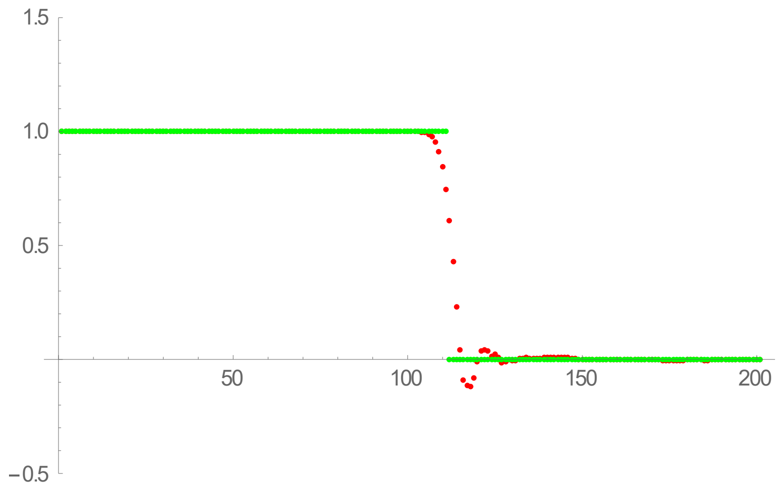

Рис. 4. Розв'язок рівняння переносу в момент часу t = 1,75 при λ = 5
(початкові умови типу «сходинка»)

ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

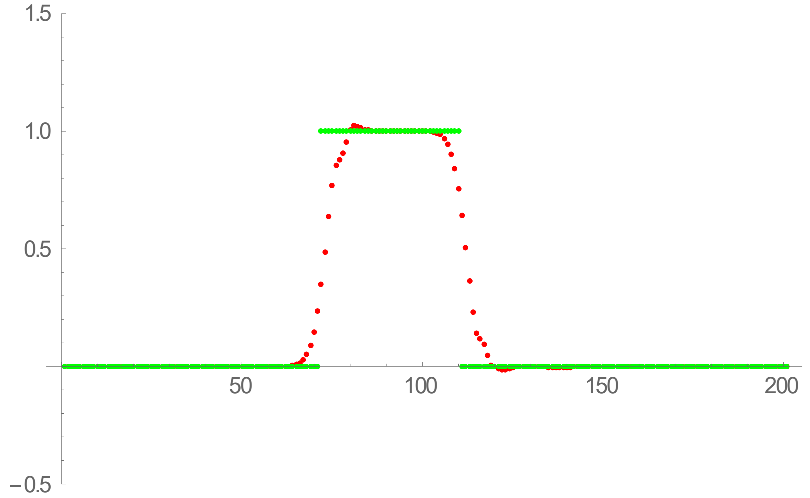

Рис. 5. Розв'язок рівняння переносу в момент часу $t = 1{,}75$ при $\lambda = 2$ (початкові умови типу «прямокутний імпульс»)

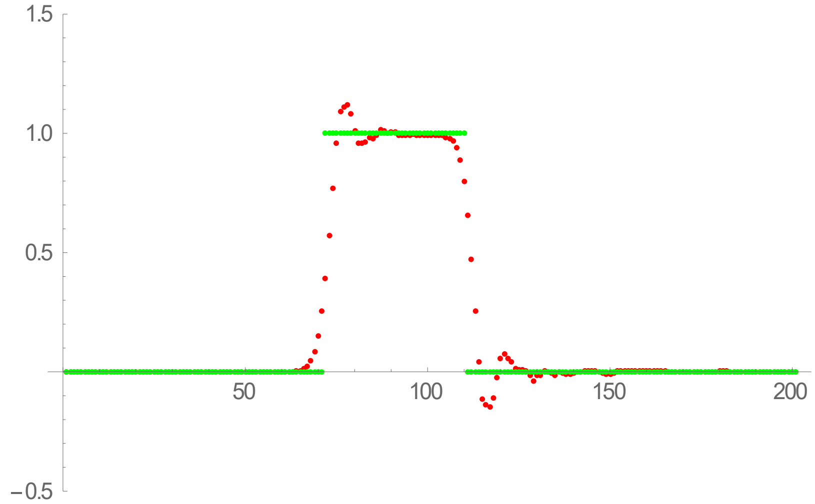

Рис. 6. Розв'язок рівняння переносу в момент часу $t = 1{,}75$ при $\lambda = 5$ (початкові умови типу «прямокутний імпульс»)

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Федоренко, Р.П. Введение в вычислительную физику [Текст] / Р.П. Федоренко. – М.: МФТИ, 1994. – 526 с.
2. Белоцерковский, О.М. Метод параметрической коррекции разностных схем [Текст] / О.М. Белоцерковский, А.И. Панарин, В.В. Щенников // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 24, № 1. – С. 65-74.
3. Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики [Текст] / С.К. Годунов // Матем. сб. – 1959. – Т. 47 (89). – С. 271-306.
4. Рябенький, В.С. Об устойчивости разностных уравнений [Текст] / В.С. Рябенький, А.Ф. Филиппов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 172 с.
5. Холодов, А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа [Текст] / А.С. Холодов // ЖВМиМФ. – 1978. – Т. 18, № 6. – С. 1476-1492.
6. Годунов, С.К. Разностные схемы. Введение в теорию [Текст] / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

7. Жуков, А.И. Метод Фурье в вычислительной математике [Текст] / А.И. Жуков. – М.: Наука, 1992. – 128 с
8. Куликовский, А.Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений [Текст] / А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. – М.: Физматлит, 2012. – 656 с.
9. Лобанов, А.И. Разностные схемы в пространстве неопределенных коэффициентов и двойственные задачи линейного программирования [Текст] / А.И. Лобанов // Математика, компьютер, образование: тезисы 24 Международной конференции. Пущино, 2017. – Ижевск: РХД, 2017. – С. 176.
10. Магомедов, К.М. Сеточно-характеристические численные методы [Текст] / К.М. Магомедов, А.С. Холодов. – М.: Юрайт, 2017. – 313 с.
11. Лобанов, А.И. Разностные схемы для уравнения переноса, удовлетворяющие обобщенному условию аппроксимации [Текст] / А.И. Лобанов //Компьютерные исследования и моделирование. – М., 2018. – С. 181

Oleg BULANCHUK, Galina BULANCHUK, Ivan YEVARLAK
Mariupol

USE OF HYBRID SCHEMES WHEN SOLVING TASK IN PRIVATE DERIVATIVES

On a numerical solution of the equations of mathematical physics it is often used hybrid schemes. Such schemes are reasonable for the simulation of processes described by the functions with discontinuous singularities (or big gradients). The purpose of the article is the research of hybrid schemas for the solution of transfer equation. It was considered different boundary conditions and initial states. It was shown that the stability of the solution depends on the parameters of the numerical schema. In the region where the function is discontinuous the schema of the first order approximation has an advantage.

Keywords: *hybrid schemes, transport equation, explicit method, hybrid transfer calculation.*

Олег БУЛАНЧУК, Галина БУЛАНЧУК, Иван ЕВАРЛАК
Мариуполь

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ СХЕМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

При численном решении уравнений математической физики часто используются гибридные схемы. Такие схемы целесообразны при моделировании процессов, описываемых функциями, которые имеют особенности разрывного характера (или большие градиенты). Целью статьи является исследование гибридных схем Федоренко при решении уравнения переноса. Были рассмотрены различные граничные и начальные условия. Показано, что устойчивость решений зависит от параметров численной схемы. В тех областях, где функция разрывная, лучше использовать схемы первого порядка аппроксимации.

Ключевые слова: *гибридные схемы, уравнение переноса, явный метод, расчет гибридного переноса.*

Стаття надійшла до редколегії 25.10.2018